

Paradossi e revisione della logica: il caso sottostrutturale

Leonardo Ceragioli

Università di Pisa

Novembre 30, 2023



Contact: leo.crg.uni@gmail.it



- 1 Che cos'è un paradosso?
- 2 Da Zenone agli Stoici
- 3 Approccio standard e problemi
- 4 Come rivedere la logica?



Che cos'è un paradosso?



Definizione (Paradosso)

Un paradosso è un argomento che:

- *Parte da premesse che sembrano incontrovertibilmente vere;*
- *Procede attraverso argomenti che sembrano incontrovertibilmente validi;*
- *Arriva a una conclusione che è una contraddizione, è falsa, o assurda in altro modo, inadatta o inaccettabile.*

Cook, R. (2012), Key Concepts in Philosophy: Paradoxes, Polity Press

Definizione

Principio di Bivalenza: Ogni enunciato è vero o falso;

Terzo escluso: Per ogni enunciato A vale $A \vee \neg A$;

Non contraddizione: Per ogni enunciato A vale $\neg(A \wedge \neg A)$

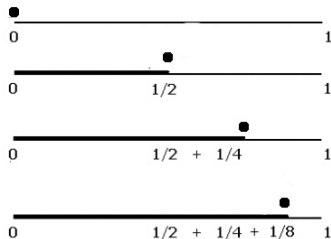


Da Zenone agli Stoici



Argomento (Impossibilità del moto)

- Per andare da A a B si deve prima raggiungere il punto medio M_1 ;
- Per andare da M_1 a B , si deve prima raggiungere il punto medio M_2 ;
- E così via;
- **Quindi** per raggiungere B si devono compiere infiniti passi;
- Ma non si possono compiere infiniti passi in un tempo finito;
- Quindi non si raggiungerà mai B in tempo finito.



Zenone e i paradossi del moto

Osservazione (Razionalismo classico)

Zenone non considera l'apparente falsità della conclusione come un motivo per rifiutare la validità della dimostrazione:

- *Si devono seguire le dimostrazioni a prescindere dall'implausibilità della conclusione;*
- *I principi della logica non sono soggetti a indagine critica.*

Osservazione (Compiti Infiniti)

Trattiamo l'assunzione che

- *non si possono compiere infiniti passi in un tempo finito*

come un principio logico. Questo vale per Zenone, ma è dubbio per noi contemporanei (matematica e infinito).

Osservazione (Infiniti potenziale e attuale)

Aristotele nega che il moto richieda infinite azioni, non asserisce che si possano compiere infinite azioni in tempo finito.

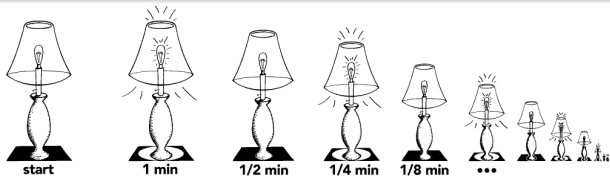
Infiniti compiti in tempo finito?

Domanda

Il principio per cui non possiamo compiere infiniti compiti in tempo finito è logico?

Argomento (Lampada di Thomson)

- La lampada parte spenta;
- Dopo un minuto viene accesa;
- Dopo mezzo minuto viene spenta;
- E così via;
- Dopo due minuti la lampada è accesa o spenta? (Thomson, 1970)



Obiezione

Tra la revisione della logica e il rifiuto del senso comune e delle percezioni, Aristotele non esita a scegliere la prima alternativa:

Obiezione

Partendo dunque da questi ragionamenti, sorpassando e ignorando la sensazione, in quanto occorrerebbe seguire solo la ragione, alcuni dicono che il tutto è uno, immobile e infinito ... Costoro, dunque, in questo modo e per questi motivi hanno manifestato le proprie opinioni sulla verità: ora, se si seguono i ragionamenti, sembra che accada così; se invece si considerano i fatti, sembra quasi una follia: non c'è infatti nessuno che sia così folle da credere che il fuoco e il ghiaccio siano una sola realtà, ma solo alcuni, per la loro stoltezza, non vedono nessuna differenza tra le cose belle e le cose che appaiono tali per abitudine.

*La Generazione e la Corruzione, I, 325a 5-25.
(Trad. Migliori, Bompiani)*

Argomento (Diodoro Crono)

- Se oggi è vero *"domani ci sarà una battaglia navale"*, allora domani ci sarà una battaglia navale;
- Se oggi è falso *"domani ci sarà una battaglia navale"*, allora domani non ci sarà una battaglia navale;
- L'enunciato *"domani ci sarà una battaglia navale"* è vero o falso (**Bivalenza**)
- Quindi, l'eventualità di una battaglia navale domani è già determinata oggi (**Determinismo**).

Osservazione

Diodoro Crono, della scuola Megarica, di derivazione eleatica, segue l'argomento e ne conclude che la contingenza del futuro (e forse perfino lo scorrere del tempo) è illusoria.

Osservazione

Aristotele rifiuta la bivalenza: gli enunciati contingenti al futuro possono non essere né veri, né falsi.

Argomento (Eubulide: Paradosso del Sorite)

- *Un grano di sabbia non è un cumulo;*
- *Se un grano di sabbia non è un cumulo, allora nemmeno 2 lo sono;*
- ...
- *Se 999'999 grani di sabbia non sono un cumulo, allora nemmeno 1 milione lo sono;*
- *Quindi: Un milione di grani di sabbia non costituiscono un cumulo.*

Osservazione

L'argomento nasce in ambito Megarico per argomentare l'assurdità della molteplicità, ma viene poi usato per fini scettici: se perfino una catena di sillogismi validi può portare da una premessa vera a una conclusione falsa, la conoscenza certa non è ottenibile.

Osservazione (Crisippo di Soli)

Rifiuto della bivalenza: suggerisce di non rispondere, sembra avere in mente una logica dei valori di verità sfumati.

Osservazione

Abbiamo due proposte di revisione della logica:

Scettici: La concatenazione di argomenti validi può portare ad argomenti non-validi;

Stoici: I valori di verità sono suscettibili di gradazione.

Obiezione

Gli scettici non propongono una revisione, ma una riduzione all'assurdo della logica. Tuttavia, tenete a mente la loro obiezione!



Argomento (Paradosso del Mentitore)

Si consideri l'enunciato

Questo enunciato è falso

- *Se è falso, allora dice la verità;*
- *Se è vero, allora è vero che è falso, cioè è falso.*

Ebulide di Mileto

Obiezione (Aristotele)

Il mentitore è vero secondo un rispetto e falso secondo un altro. Proprio come quando prometto di rompere un giuramento non andando ad Atene sto mantenendo e infrangendo allo stesso tempo la mia parola, ma in senso differente.

Elenchi Sofistici 180b2–7

Osservazione (Errori Argomentativi)

Vulgata: i paradossi contengono errori argomentativi e il compito del logico è smascherarli

Approccio standard e problemi



Osservazione (Eccezionalità della Logica)

Che la logica abbia seguito questo sicuro cammino fin dai tempi più antichi, si rileva dal fatto che, a cominciare da Aristotele, non ha dovuto fare nessun passo indietro ...

Notevole è anche il fatto che sin oggi la logica non ha potuto fare un passo innanzi, di modo che, secondo ogni apparenza, essa è da ritenersi come chiusa e completa.

Kant, Critica della Ragion Pura, prefazione alla seconda edizione

Osservazione

Per risolvere i paradossi, non si deve modificare la logica, ma si deve restringere il linguaggio in modo che non permetta la formulazione di argomenti paradossali:

- *Rifiutare l'autoriferimento o restringere l'applicazione del predicato di verità (Mentitore);*
- *Rifiutare i predicati vaghi (Sorite);*

(N.B.: stessa soluzione delle antinomie di Kant)

Obiezione

- *Progressi e (proposte di) confutazioni nella logica;*
- *Inconvenienti delle restrizioni linguistiche*
 - *L'autoriferimento è più che accettabile in generale (Criterio troppo forte);*
 - *Escludere l'autoriferimento non risolve il problema (Criterio troppo debole);*
- *Nei linguaggi non formalizzati i paradossi sembrano trattabili senza restringere il campo dell'esprimibile.*



Obiezione

Ai tempi di Kant, la Logica era una sintesi della logica proposizionale e della sillogistica aristotelica. Da allora abbiamo avuto:

Estensioni: Logica classica del primo e secondo ordine;

Revisioni: Proposte di rifiutare principi logici come il terzo escluso, la bivalenza e l'ex falso quodlibet.

Osservazione

- *Esistono proposte di revisione della logica indipendenti dai paradossi;*
- *L'esistenza di proposte alternative di revisione della logica prova che la logica non è un campo di studi chiuso.*



Obiezione (Escludere l'autoriferimento è troppo)

Enunciati contenenti autoriferimento sembrano comprensibili, non problematici e perfino veri:

- *Que/sto e/nun/cia/to con/tie/ne quin/di/ci sil/la/be*
- *Questo enunciato è vero*

Obiezione (Escludere l'autoriferimento è troppo poco)

Paradossi senza autoriferimento:

- ① *Tutti gli enunciati che seguono nella lista sono falsi;*
- ② *Tutti gli enunciati che seguono nella lista sono falsi;*
- ③ ...

Se l'enunciato 1 è vero, allora gli enunciati successivi sono tutti falsi. Ma allora l'enunciato 2 è vero, dato che tutti gli enunciati sotto di lui sono falsi, quindi l'enunciato 1 è falso. Se l'enunciato 1 è falso, allora c'è un enunciato più in basso che è vero. Per questo enunciato ragioniamo come prima e dimostriamo la sua falsità, quindi 1 non può nemmeno essere falso.

Yablo, S. (1993), "Paradox without Self-Reference", Analysis 53: 251-252.

Obiezione (L'autoriferimento può dipendere da fatti non sintattici)

L'unico enunciato scritto in rosso in questa slide è falso.

Kripke, S. (1975), "Outline of a Theory of Truth", Journal of Philosophy 72: 690-716.

Obiezione (Auto-confutazione)

Le teorie delle gerarchie di enunciati devono essere formulate in un linguaggio che è privo di gerarchie. Come dovremmo formulare ad esempio l'enunciato "tutte le proposizioni hanno un tipo"?

Obiezione (Linguaggio Ordinario)

Il linguaggio ordinario sembra in grado di parlare della verità senza restrizioni, usando anche l'autoriferimento e neutralizzando in qualche modo i paradossi. Restringendo il linguaggio perdiamo la capacità di esprimere alcune cose.



Come rivedere la logica?



Un semplice ritorno al passato?

Osservazione

Le soluzioni antiche prevedono in generale il rifiuto della bivalenza e del terzo escluso: ci sono enunciati che non sono né veri né falsi.

Obiezione (Mentitore esteso)

Si consideri l'enunciato

Questo enunciato non è vero

Di un enunciato che non è né vero né falso, possiamo dire che non è vero. Se l'enunciato è vero, allora non è vero. Se non è vero, allora è vero. Contraddizione!

Priest G. (2006), In Contradiction, pg 15

Osservazione

Sembra che i buchi nei valori di verità non siano una soluzione definitiva.



Obiezione (Paradosso di Berry)

Si consideri il più piccolo numero che non può essere denotato con una descrizione di meno di 100 lettere:

- *Per definizione, non può essere denotato con meno di 100 lettere;*
- *Ma lo abbiamo appena descritto con 76 lettere!*

Obiezione

Pare non richiedere il terzo escluso, quindi buchi nei valori di verità probabilmente non sono in grado di risolvere il problema. La questione tuttavia è controversa!

Priest, G. (2019). Berry's Paradox... Again. The Australasian Journal of Logic. 16. 41.



Obiezione (Formulazioni alternative del mentitore)

Esistono formulazioni del mentitore che resistono all'eliminazione del terzo escluso:

- Usando il termine $\lambda = \ulcorner \neg T(\lambda) \urcorner$ e la trasparenza della verità ($T(\ulcorner S \urcorner)$ sostituibile con S), si ottiene una contraddizione sia da $T(\lambda) \vee \neg T(\lambda)$ (terzo escluso), sia da $\neg(T(\lambda) \wedge \neg T(\lambda))$ (non contraddizione);
- Usando il termine $\lambda = \ulcorner \neg T(\lambda) \urcorner$ e i principi (più deboli della trasparenza)
 - $\neg(S \wedge T(\ulcorner \neg S \urcorner))$
 - $\neg(\neg S \wedge \neg T(\ulcorner \neg S \urcorner))$

otteniamo una contraddizione con la logica minimale!

Heck, Richard G. (2012). A Liar Paradox. Thought: A Journal of Philosophy 1 (1):36-40.



Osservazione

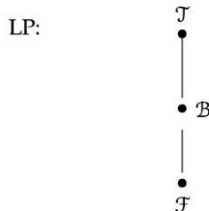
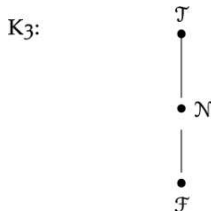
Il motivo principale per rifiutare le contraddizioni è che nella logica classica, da una contraddizione segue qualunque enunciato:

ex falso quodlibet $A \wedge \neg A \rightarrow B$

Argomento (Paracoerenza)

- *Se rifiutiamo il principio dell'ex falso quodlibet, possiamo accettare i paradossi;*
- *Il modo più semplice per farlo è accettare che un enunciato possa essere sia vero che falso.*

Da buchi a doppi valori di verità



K_3 :

\neg		\wedge	T	N	F	\vee	T	N	F
T	F	T	T	N	F	T	T	T	T
N	N	N	N	N	F	N	T	N	N
F	T	F	F	F	F	F	T	N	F

Osservazione (Conseguenza logica)

$\Gamma \models C$ sse, per ogni valutazione, se ogni $\gamma \in \Gamma$ è vero, allora C è vero.

Buchi nei valori di verità: La preservazione riguarda solo il valore T;

Dialeteismo: La preservazione della verità riguarda anche il valore paradossale B.

Osservazione (Rifiuto ex falso quodlibet)

Se A è sia vero che falso, e C è semplicemente falso, $A \wedge \neg A \not\models C$.

Osservazione (Addomesticamento dei paradossi)

I paradossi non rendono più banale la teoria.

Obiezione (Rifiuto)

Solitamente per rifiutare un enunciato si usa la negazione, ma se A e $\neg A$ possono essere entrambe vere (e false), asserire $\neg A$ non veicola alcun rifiuto.

Obiezione (Isolare gli enunciati paradossali)

Un dialeteista sembra incapace di asserire che un enunciato non è paradossale, perché $\neg(A \wedge \neg A)$ vale sia se A è un paradosso, sia se è un enunciato qualunque. (Il principio di non-contraddizione è vero, solo che a volte è anche falso).

Osservazione (Conseguenza logica)

$\Gamma \models C$ sse, per ogni valutazione, se ogni $\gamma \in \Gamma$ è vero, allora C è vero.

Osservazione (Proprietà strutturali)

Riflessività $\Gamma, C \models C$;

Monotonia se $\Gamma \models C$, allora $\Gamma, A \models C$;

Transitività se $\Gamma \models C$ e $\Delta, C \models D$, allora $\Gamma, \Delta \models D$;

Insensibilità al numero se $\Gamma, A, A \models C$, allora $\Gamma, A \models C$.

Osservazione (Regole strutturali)

$$A \Rightarrow A$$

$$Cut \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Theta, A \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Lambda}$$

$$Weak \Rightarrow \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}$$

$$\Rightarrow Weak \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}$$

$$Con \Rightarrow \frac{\Gamma, A, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}$$

$$\Rightarrow Con \frac{\Gamma \Rightarrow A, A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}$$

Paradosso di Curry

Osservazione (Paradosso di Curry)

Se questo enunciato è vero, allora Civati vincerà le prossime elezioni
 $(\gamma \leftrightarrow (T(\ulcorner \gamma \urcorner) \rightarrow \perp))$.

Argomento

Se l'enunciato è vero, allora Civati vincerà le prossime elezioni per MP. Se l'enunciato è falso, allora significa che l'antecedente deve essere vero e il succedente falso. Ma, se l'antecedente è vero, allora è vero anche che se esso è vero, Civati vincerà le elezioni (per trasparenza di T). Quindi, Civati vincerà le elezioni (ancora per MP).

Osservazione (I paradossi devono dire il falso?)

L'argomento sarebbe paradossale anche se la conseguenza dell'enunciato di Curry fosse vera. Infatti, il paradosso del mentitore nella forma di Epimenide il cretese conclude (correttamente) che almeno un cretese ha almeno una volta detto la verità. Tuttavia, la plausibilità della conclusione non rende meno paradossale l'argomento.

Zardini E., Substructural approaches to paradox, Synthese, 199 (3), S493-S525, 2021.

Paradosso di Curry e contrazione

Osservazione (Contrazione nel linguaggio oggetto)

Una strategia per evitare il paradosso di Curry consiste nel rifiutare la:

Legge di Contrazione : per ogni A e B , $A \rightarrow (A \rightarrow B) \vdash A \rightarrow B$

Restall, G. (1993). How to Be Really Contraction Free. Studia Logica, 52(3), 381–391.

Obiezione (Generalizzazione di Curry)

Il paradosso può venir replicato usando predicati differenti dal condizionale.

Osservazione (Paradosso della validità di Curry)

C'è una derivazione valida della conclusione "Civati vincerà le prossime elezioni" che ha questo enunciato come unica assunzione ($\pi \leftrightarrow Val(\ulcorner \pi \urcorner, \ulcorner \perp \urcorner)$).



Paradosso di Curry e contrazione

Osservazione (Soluzione generale)

Rifiutando la Contrazione a livello strutturale, si escludono tutte le formulazioni del paradosso.

Argomento (Dimostrazione)

$$\begin{array}{c} \frac{\vdash \gamma \leftrightarrow (T(\ulcorner \gamma \urcorner) \rightarrow \perp)}{\vdash \gamma \leftrightarrow (\gamma \rightarrow \perp)} \quad \gamma \vdash \gamma \\ \hline \gamma \vdash \gamma \rightarrow \perp \quad \gamma \vdash \gamma \\ \hline \text{Con} \Rightarrow \frac{\gamma, \gamma \vdash \perp}{\gamma \vdash \perp} \\ \hline \vdash \gamma \rightarrow \perp \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \vdash \gamma \rightarrow \perp \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdash \gamma \leftrightarrow (T(\ulcorner \gamma \urcorner) \rightarrow \perp) \\ \vdash \gamma \leftrightarrow (\gamma \rightarrow \perp) \\ \hline \vdash \gamma \end{array}$$
$$\frac{\vdash \gamma \rightarrow \perp \quad \vdash \gamma}{\vdash \perp}$$

Obiezione (Cantor)

La dimostrazione del teorema di Cantor utilizza la contrazione.

Argomento (Ebulide: Paradosso del Sorite)

- *Un grano di sabbia non è un cumulo;*
- *Se un grano di sabbia non è un cumulo, allora nemmeno 2 lo sono;*
- ...
- *Se 999'999 grani di sabbia non sono un cumulo, allora nemmeno 1 milione lo sono;*
- *Quindi: Un milione di grani di sabbia non costituiscono un cumulo.*



Definizione (Somiglianza)

Definiamo

$a \sim_P b = a$ è simile a b rispetto al predicato P ;

Ad esempio, $\text{Homer} \sim_{\text{essercalvo}} \text{CharlieBrown}$.

Definizione (Principio di tolleranza)

Il principio di tolleranza stabilisce che se due oggetti sono simili rispetto al predicato P e il primo soddisfa il predicato, allora anche il secondo lo soddisfa. Vediamo alcune formulazioni possibili:

Condizionale: $Pa \wedge a \sim_P b \rightarrow Pb$

Condizionale quantificato: $\forall x \forall y (Px \wedge x \sim_P y \rightarrow Py)$

Argomentativo: $Pa, a \sim_P b \vdash Pb$

Argomento (Tolleranza come argomento)

Accettiamo $Pa, a \sim_P b \vdash Pb$, ma non le applicazioni problematiche della transitività:

$$\frac{Pa_0, a_0 \sim_P a_1 \vdash Pa_1 \quad Pa_1, a_1 \sim_P a_2 \vdash Pa_2}{Pa_0, a_0 \sim_P a_1, a_1 \sim_P a_2 \vdash Pa_2} \text{Cut}$$

\vdots

$$Pa_0, a_0 \sim_P a_1, \dots, a_{n-1} \sim_P a_n \vdash Pa_n$$

Ciascuna applicazione del principio di tolleranza è corretta, ma la loro composizione può essere scorretta!

Osservazione (Ripresa degli scettici)

La proposta consiste nel prendere sul serio l'uso scettico dell'argomento del sorite, ma rifiutando l'assurdità della conclusione.



Argomento (Tolleranza come legge)

$Pa \wedge a \sim_P b \rightarrow Pb$ e $\forall x \forall y (Px \wedge x \sim_P y \rightarrow Py)$ sono teoremi dimostrabili, ma quando compaiono come premesse di una conseguenza non possono essere eliminate. Cioè, $\vdash \forall x \forall y (Px \wedge x \sim_P y \rightarrow Py)$, ma l'inferenza

$$\frac{\forall x \forall y (Px \wedge x \sim_P y \rightarrow Py), \Gamma \vdash C}{\Gamma \vdash C}$$

non è valida in generale.

Osservazione (Lemmi e transitività)

Questo fenomeno non è strano: l'uso di lemmi richiede la transitività.

Paradosso del sorite, rifiutare la transitività

Definizione

Definiamo i valori di verità:

$$v(Pa) = 1 \leftrightarrow_{df} Pa \text{ è vero};$$

$$v(Pa) = \frac{1}{2} \leftrightarrow_{df} a \text{ è un caso limite del predicato } P;$$

$$v(Pa) = 0 \leftrightarrow_{df} Pa \text{ è falso};$$

Usiamo le tavole di verità della logica di Priest (o di Kleene).

Per la somiglianza, imponiamo:

$$v(a \sim_P b) = 1 \leftrightarrow_{df} |v(Pa) - v(Pb)| < 1$$

$$v(a \sim_P b) = 0 \leftrightarrow_{df} |v(Pa) - v(Pb)| = 1$$

Obiezione

Le condizioni di verità della somiglianza sono molto permissive: un uomo alto assomiglia a un grattacielo riguardo all'altezza?

Definizione (Conseguenza logica non-transitiva)

$\Gamma \models C$ sse, per ogni valutazione, se ogni $\gamma \in \Gamma$ ha valore 1, allora C ha valore 1 o $\frac{1}{2}$.

Argomento (Violazione della transitività)

Consideriamo le valutazioni:

- $v(Pa) = 1$;
- $v(Pb) = \frac{1}{2}$;
- $v(Pc) = 0$.

Dalla definizione della somiglianza, otteniamo $v(a \sim_P b) = 1$ e $v(b \sim_P c) = 1$. Dalla definizione della conseguenza logica, segue che:

- $Pa, a \sim_P b \models Pb$;
- $Pb, b \sim_P c \models Pc$;
- $Pa, a \sim_P b, b \sim_P c \not\models Pc$.

Un teorema non può essere usato come lemma, perché

$$\models C$$

significa che C è sempre valutato 1 o $\frac{1}{2}$. Invece, in

$$\Gamma, C \models D$$

si usa C come strettamente vero.

Osservazione

- *I paradossi nascono come argomenti per conclusioni controintuitive (Zenone)*
- *Vengono poi considerati come prove che c'è qualcosa di sbagliato nell'argomentazione;*
 - *Errore linguistico (Aristotele)*
 - *Revisione della logica (Crisippo)*
 - *Abbandono della logica (scettici)*
- *Lunga storia del paradosso come errore linguistico;*
- *Vantaggi e limiti dei buchi nei valori di verità;*
- *vantaggi e limiti del dialeteismo (rifiuto);*
- *la prospettiva più recente: modificare le regole strutturali (si accoglie la proposta scettica in senso non scettico).*



- Mignucci, Mario. "The Stoic Analysis of the Sorites." Proceedings of the Aristotelian Society, vol. 93, 1993, pp. 231–45.
- Cook, R. (2012), Key Concepts in Philosophy: Paradoxes, Polity Press.
- Haack, S., "Deviant Logic", 1974.
- Heck, Richard G. (2012). A Liar Paradox. Thought: A Journal of Philosophy 1 (1):36-40.
- Beall e Murzi (2013). Two Flavors of Curry's Paradox. The Journal of Philosophy, 110(3), 143–165.
- Restall, G. (1993). How to Be Really Contraction Free. Studia Logica, 52(3), 381–391.
- Zardini E., Substructural approaches to paradox, Synthese, 199 (3), S493-S525, 2021.
- Cook, R. (2012), Key Concepts in Philosophy: Paradoxes, Polity Press
- Sorensen, Roy A. (2003). A Brief History of the Paradox. New York: Oxford University Press USA.
- Cobreros, Egré, Ripley, van Rooij. (2021). Tolerant reasoning: nontransitive or nonmonotonic?

